ВЕСТНИК
КЕМЕРОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
СЕРИЯ: ГУМАНИТАРНЫЕ И ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

оригинальная статья https://elibrary.ru/gqpuzw

Методические особенности использования некоторых формул школьной математики в курсе математического анализа в вузе

Сергеева Ольга Алексеевна
Кемеровский государственный университет, Россия, Кемерово
eLibrary Author SPIN: 8407-8529
https://orcid.org/0000-0002-9204-6318
okoin@yandex.ru

Аннотация: На стыке общего и высшего профессионального образования актуальна проблема преемственности в обучении. В частности, это касается преемственности при изучении математического анализа в школе и вузе. Положительный потенциал школьного курса начал математического анализа не только формирует у выпускников математическую культуру и научное мировоззрение, но и играет большую роль в их дальнейшем обучении в вузе, особенно на физико-математических и информационно-технологических направлениях. Для организации успешного обучения математическому анализу в вузе и предотвращения возможных затруднений преподавателю дисциплины необходимо проводить актуализацию уже имеющихся знаний, умений и навыков бывших школьников и обеспечить преемственность теоретического материала и формул математического анализа уровней школы и вуза. Цель – провести исследование методических особенностей преемственности некоторых математических формул при изучении математического анализа. В качестве примеров таких преемственных формул рассмотрены две степенные формулы суммирования: биномиальная формула сокращенного умножения Ньютона и формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Эти формулы являются основополагающими в алгебре и в математическом анализе при работе с многочленами и аналитическими функциями. Знание этих формул и их обобщенных версий, а также умение применять эти формулы на практике позволяет учащимся использовать более рациональные и креативные методы решения задач математического анализа на вычисление пределов последовательностей и функций. В результате предложенный в работе методический подход к применению данных формул позволяет универсальным методом решать задачи как школьного, так и вузовского раздела теории пределов в курсе математического анализа, тем самым он демонстрирует пример эффективного решения проблемы преемственности математического образования в системе *школа – вуз*.

Ключевые слова: преемственность, математический анализ, бином Ньютона, бесконечная геометрическая прогрессия, формула Тейлора-Маклорена, предел функции

Цитирование: Сергеева О. А. Методические особенности использования некоторых формул школьной математики в курсе математического анализа в вузе. *Вестник Кемеровского государственного университета. Серия: Гуманитарные и общественные науки*. 2025. Т. 9. № 2. С. 275–282. https://doi.org/10.21603/2542-1840-2025-9-2-275-282

Поступила в редакцию 10.12.2024. Принята после рецензирования 14.02.2025. Принята в печать 17.02.2025.

full article

Methodological Aspects of Implementing Some Formulas of School Mathematics in University-Level Mathematical Analysis Course

Olga A. Sergeeva
Kemerovo State University, Russia, Kemerovo
eLibrary Author SPIN: 8407-8529
https://orcid.org/0000-0002-9204-6318
okoin@yandex.ru

Abstract: Continuity is very important at the intersection of school and higher education. In particular, it concerns the continuity of mathematical analysis at school and university. The school course of basic mathematical analysis brings up mathematical culture and scientific outlook. It is crucial for higher education in physics, mathematics, and information technology. To structure the course of mathematical analysis and prevent possible difficulties,

the university professor needs to actualize the existing knowledge and skills in first-year students by providing the continuity of theory and practice. The article describes the methodological approach to continuity for some mathematical formulas in the university course of mathematical analysis, i.e., the two-degree summation formulas of Newton's binomial formula of reduced multiplication and the formula of the sum of infinitely decreasing geometric series. In algebra and mathematical analysis, these formulas are used to work with polynomials and analytic functions. These formulas and their generalized versions allow university students to use more rational and creative methods of mathematical analysis for calculating limits of sequences and functions. They provide a universal method that can be applied to problems of the theory of limits in the course of mathematical analysis at school and university. The case is an example of effective continuity of mathematical education in the school-university system.
Keywords: continuity, mathematical analysis, Newton's binomial, infinite geometric progression, Taylor-Maclaurin formula, limit of function

Citation: Sergeeva O. A. Methodological Aspects of Implementing Some Formulas of School Mathematics in University-Level Mathematical Analysis Course. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Gumanitarnye i obshchestvennye nauki*, 2025, 9(2): 275–282. (In Russ.) https://doi.org/10.21603/2542-1840-2025-9-2-275-282

Received 10 Dec 2024. Accepted after review 14 Feb 2025. Accepted for publication 17 Feb 2025.

Введение

Проблема преемственности в обучении приобретает сегодня все большую значимость в связи с переходом к системе непрерывного образования [1]. Особенно актуально решение этой проблемы на стыке общего и высшего профессионального образования, когда меняется не только образовательное учреждение, но и система изложения учебного материала. В дидактике большое значение придается опоре нового учебного материала на старые уже имеющиеся знания и навыки, на систему сложившихся связей. Для этого рекомендуется соблюдать преемственность изучаемого материала, а также учитывать развитие старых знаний под влиянием новых [2]. Когда при изучении нового материала привлекаются старые знания, ранее изученные утверждения и формулы, то они обновляются, становятся более мобильными и часто приобретают более углубленный или более обобщенный смысл, а новый материал на основе этого легче и быстрее усваивается. По мнению К. Д. Ушинского, процесс усвоения знаний – это процесс установления связи между вновь приобретенными и старыми знаниями, между которыми имеются внутренние связи [3].

Изучение основ математического анализа в рамках средней школы носит общеобразовательный характер и предполагает, что выпускники школ должны овладеть определенным набором знаний, умений и навыков по элементам математического анализа, формирующих у них математическую культуру и научное мировоззрение [4]. Однако часто после успешного изучения школьных начал математического анализа обучающиеся, будучи уже студентами, сталкиваются с проблемами в изучении математического анализа в вузе. Это прежде всего связано с различием в методических особенностях обучения в школе и в вузе, а также с использованием непривычного для вчерашнего школьника формально-символьной системы изложения материала. Во избежание таких проблем и для обеспечения естественной преемственности обучения математическому анализу между школой и вузом необходимо понимать, что школьный курс алгебры, включающий элементы математического анализа, в силу возрастных особенностей школьников изучается на пропедевтическом уровне. Многие понятия математического анализа изучаются на школьном уровне без строгих определений и формулировок, основываясь на их наглядно-графическом представлении [5; 6]. Поэтому изучение полного курса математического анализа в вузе должно учитывать и развивать начальные знания студентов, которые они приобрели в школе, постепенно наделяя их формально-символьным представлением, строгими математическими определениями и доказательствами. Имеющиеся знания как вспомогательные или как связывающие звенья позволят студентам быстро выйти на новый уровень знаний и навыков по курсу математического анализа в вузе. Бывшие школьники, став студентами, для успешного обучения математическому анализу в вузе, говоря словами К. Д. Ушинского, «идя все дальше и дальше, не должны оставить бесполезным позади себя то, что уже приобрели» [цит. по: 3, с. 8]. Преподаватели математического анализа в вузе должны проводить процесс обучения с учетом специфики содержания знаний и представлений студентов, приобретенных в школе [7–9]. В частности, для реализации эффективной преемственности обучения математическому анализу преподавателю требуется учитывать методические особенности использования школьных формул математики в курсе математического анализа в вузе.

Согласно утвержденному ФГОС среднего общего образования, в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа» в 11 классе изучаются такие понятия математического анализа, как *предел последовательности*, *непрерывность* и *производная функции*, *определенный интеграл* [10; 11]. Данные понятия имеют в школе наглядно-интуитивный уровень изучения, при котором изложение соответствующей теории проводится без рассмотрения сложных в техническом отношении и трудных для понимания учащихся вопросов [12]. Многие используемые в школе математические формулы приводятся без строгого доказательства, которое по объективным причинам непосильно школьникам [13; 14]. Знания и умения выпускников 11 класса должны включать представление о физическом и геометрическом смысле производной, умение применять производную к исследованию функции и построению ее графика, формулы производных и первообразных элементарных функций, интегральную формулу Ньютона-Лейбница, формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, комбинаторную формулу сокращенного умножения бинома Ньютона [15–18].

Вузовские учебники математического анализа, по которым ведется преподавание курса, в большинстве своем не учитывают уровень школьной подготовки и имеющиеся начальные знания студентов [19–23]. В зависимости от учебных планов направлений это иногда компенсируется проведением адаптационных занятий перед изучением основной дисциплины. Но, к сожалению, такая вузовская пропедевтика позволительна по плану не всегда. Поэтому для предотвращения возможных проблем в обучении студентов и обеспечения преемственности преподавателю дисциплины «Математический анализ» необходимо проводить актуализацию уже имеющихся знаний, умений и навыков бывших школьников. С этой целью в самом начале обучения рекомендуется выяснить, какими входными знаниями и навыками обладают студенты, а далее по мере изучения дисциплины напоминать студентам об уже известных им утверждениях и формулах, приводить и доказывать их обобщения, акцентировать внимание на наиболее подходящих из них на соответствующем этапе обучения.

На основе личного многолетнего опыта преподавания математического анализа для студентов первого курса физико-математических и педагогических направлений Кемеровского государственного университета и анализа учебно-методических материалов по дисциплине автором было проведено исследование преемственности некоторых математических формул в школе и вузе при изучении математического анализа.

В полном курсе математического анализа в вузе кроме характерных формул анализа, таких как формулы производных и первообразных, встречаются к тому же и другие полезные алгебраические формулы, известные студентам еще со школы. Для всех формул, как старых, уже известных со школы, так и новых, в системном курсе анализа приводится строгое доказательство аналитическими методами через теорию пределов, дифференциальное или интегральное исчисление. Некоторые школьные формулы могут быть успешно использованы при вычислении пределов функций, но свое полное строгое доказательство они получают в более поздних разделах анализа, таких как дифференциальное исчисление, теория рядов и др.

Для исследования методических особенностей использования формул школьной математики в курсе математического анализа в данной статье будут рассмотрены методы решения, применяющие степенную биномиальную формулу сокращенного умножения Ньютона и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Эти формулы являются основополагающими в алгебре и в математическом анализе при работе с многочленами и аналитическими функциями. В частности, владение этими формулами и их обобщениями позволяет учащемуся быстро сориентироваться в деталях доказательства ряда утверждений из теории пределов, а также использовать более рациональные методы решения соответствующих задач.

Цель – провести исследование методических особенностей преемственности некоторых математических формул при изучении математического анализа

Результаты

Теория пределов (как и другие разделы математического анализа) требует особого внимания и определенного уровня подготовки учащихся к восприятию теоретического и задачного материалов в силу их высокого уровня формальности и абстракции [24]. Это осложняет процесс обучения вчерашних школьников, ориентированных на наглядно-интуитивную систему восприятия учебного материала. Использование базы из уже известных формул из школьной математики для доказательства математических утверждений и решения практических задач математического анализа облегчает восприятие новых понятий, помогает быстрее осознать ход решения задач и детали доказательства. К таким формулам в теории пределов математического анализа можно отнести формулу бинома Ньютона и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Эти формулы активно используются в комбинаторике, алгебре и математическом анализе и легко допускают обобщения. Обе формулы в обобщенном виде являются формулами Тейлора-Маклорена [25]. Они вводятся и получают строгое доказательство в разделе дифференциального исчисления, но могут быть вовлечены в процесс обучения значительно раньше, как обобщения одноименных школьных формул математики.

Классическая формула бинома Ньютона помогает возвести сумму двух чисел в любую натуральную степень. В курсе математики общеобразовательной школы изучаются и активно применяются частные случаи этой формулы для второй и третьей степени бинома, называемые квадрат и куб суммы двух чисел соответственно [15–17]. В профильных математических классах [18] также изучается общий случай степенной формулы бинома для натуральной степени n, которая имеет вид:

$$a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot x^k, \qquad (1)$$

где биномиальными коэффициентами являются C_n^k – это числа сочетаний из n по k, значение которых можно найти по комбинаторной формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ или из треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
1 & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & & 1
\end{array}$$

Преобразовав бином к виду, когда константа $a = 1$, формулу (1) можно переписать так:

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot x^k = \\ = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + nx^{n-1} + x^n. \qquad (2)$$

При вычислении пределов рациональных функций $f(x)$, содержащих степенные биномы в числителе и знаменателе, при $x \to 0$ достаточно по формуле (2) выписать только первые младшие степени с ненулевыми коэффициентами. Именно младшие степени будут оказывать прямое влияние на значение предела, а все более старшие степени в пределе сводятся к нулю и становятся нейтральными элементами полученного предельного значения. Поэтому нет необходимости выписывать все слагаемые формулы бинома целиком, можно ограничиться только первыми степенями с ненулевыми коэффициентами, а все последующие более старшие степени записать в сжатом виде с помощью о-малого [19; 20]:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Ax^m + o(x^m)}{Bx^k + o(x^k)} = \begin{cases} \dfrac{A}{B}, \text{если } m = k \\ 0, \text{если } m > k \\ \infty, \text{если } m < k \end{cases}. \qquad (3)$$

Не вдаваясь в теоретические подробности о-символики [20–22], здесь достаточно объяснить учащимся, что символом $o(x^n)$ при $x \to 0$ будем обозначать любой многочлен переменной x, состоящий из одночленов степени строго больше n. На основании этого установить, что отношение $\frac{o(x^n)}{x^n}$ кратно x, а значит $\frac{o(x^n)}{x^n} \to 0$ при $x \to 0$, т.е. является бесконечно малой функцией при $x \to 0$ и будет обозначаться $o(1)$. Такой подход к вычислению пределов не требует специальных знаний теории о-символики и доступен как школьникам, так и студентам на пропедевтическом уровне (прим. 1).

Пример 1.
Найти значение предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^6-(1+6x)}{x^2+7x^5-2x^7}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^6-(1+6x)}{x^2+7x^5-2x^7} = \left|\frac{0}{0}\right| = \begin{bmatrix} \text{Распишем } (1+x)^6 \\ \text{по формуле (2) до} \\ \text{второй степени } x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 6x + \frac{6\cdot(6-1)}{2!}x^2 + o(x^2) - 1 - 6x}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{15x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \begin{bmatrix} \text{Поделим числитель} \\ \text{и знаменатель на} \\ \text{младшую степень } x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{15 + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{15}{1} = 15.$$

При условиях, что $x \to 0$ и $a = 1$, те же биномиальные коэффициенты могут быть использованы для суммы степеней бинома $(1 + x)^\alpha$ для $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot (\alpha-(k-1))}{k!} \cdot x^k + o(x^n), \qquad (4)$$
$$x \to 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Такая формула для $(1 + x)^\alpha$ при $x \to 0, \alpha \in \mathbb{R}$ содержит в общем случае бесконечное число степенных одночленов указанного вида и называется формулой Тейлора-Маклорена для степенного бинома [23]. Ее строгое доказательство, наряду с доказательствами формул Тейлора-Маклорена для функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1 + x)$, приводится в разделе дифференциального исчисления [21–23]. Но при знании учащимися школьной формулы (2) формулу (4), имеющую такие же биномиальные коэффициенты, можно ввести в практику вычисления пределов значительно раньше, рассматривая ее как обобщение формулы бинома Ньютона на случай действительного значения показателя степени (прим. 2).

Пример 2.
Найти значение предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^6}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x+2x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^6}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x+2x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \begin{bmatrix} \text{Распишем } (1+5x)^{1/5} \\ \text{по формуле (4) до} \\ \text{третьей степени } x^3 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+o(x^3)}{1+\frac{1}{5}\cdot 5x+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}(5x)^2+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}(5x)^3+o(x^3)-1-x+2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+o(x^3)}{1+x-2x^2+6x^3+o(x^3)-1-x+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+o(x^3)}{6x^3+o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+o(1)}{6+o(1)} = \frac{1}{6}.$$

 https://doi.org/10.21603/2542-1840-2025-9-2-275-282

Используя замены переменных $t = x - a$ при $x \to a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $t = \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, обобщенную формулу бинома Ньютона можно использовать для вычисления пределов функций с предельными точками, отличными от нуля (примеры 3 и 4).

Пример 3.
Найти значение предела $\lim\limits_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$.

Решение: Воспользуемся соответствующей заменой переменной, чтобы прийти к нулевой предельной точке:

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = x - 7 \\ t \to 0 \text{ при } x \to 7 \\ x = t + 7 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(9+t)^{\frac{1}{2}} - (27+t)^{\frac{1}{3}}}{(16+t)^{\frac{1}{4}} - 2} = \lim_{t \to 0} \frac{3(1+\frac{t}{9})^{\frac{1}{2}} - 3(1+\frac{t}{27})^{\frac{1}{3}}}{2(1+\frac{t}{16})^{\frac{1}{4}} - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3 \cdot \left((1+\frac{t}{9})^{\frac{1}{2}} - (1+\frac{t}{27})^{\frac{1}{3}}\right)}{2 \cdot \left((1+\frac{t}{16})^{\frac{1}{4}} - 1\right)} = \left[\begin{array}{l} \text{Распишем биномы} \\ \text{по формуле (4)} \\ \text{до первой степени } t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{9}+o(t)-\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{27}+o(t)\right)}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{16}+o(t)-1} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1+\frac{t}{18}-1-\frac{t}{81}+o(t)}{1+\frac{t}{64}+o(t)-1} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\frac{7t}{162}+o(t)}{\frac{t}{64}+o(t)} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\frac{7}{162}+o(1)}{\frac{1}{64}+o(1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{7}{162}}{\frac{1}{64}} = \frac{112}{27} = 4\frac{4}{27}.$$

Здесь было использовано свойство: $o(t) \pm o(t) = o(t)$ при $t \to 0$, которое легко устанавливается на основе того, что каждое $o(t)$ – это произвольный многочлен переменной t, состоящий из одночленов степени строго больше первой.

Пример 4.
Найти значение предела $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

Решение:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Замена } t = {}^{1}/_{x} \\ t \to +0 \text{ при } x \to +\infty \\ x = {}^{1}/_{t} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2} = \left[\begin{array}{l} \text{Распишем биномы} \\ \text{по формуле (4)} \\ \text{до второй степени } t^2 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{1 + \frac{1}{2}2t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(2t)^2 + o(t^2) - 2\left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2 + o(t^2)\right) + 1}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)t^2 + o(t^2)}{t^2} = \lim_{t \to +0}\left(-\frac{1}{4} + o(1)\right) = -\frac{1}{4}.$$

Аналогично предыдущему примеру, при преобразовании выражения в числителе воспользовались свойствами: $o(C \cdot t^k) = C \cdot o(t^k) = o(t^k)$, $o(t^k) \pm o(t^k) = o(t^k)$ при $t \to 0$, $C = const$, для $k = 2$.

Продемонстрированные в примерах способы вычисления пределов с применением обобщенной биномиальной формулы алгоритмически схожи (с точностью до замены переменной), являются универсальными, поэтому легко запоминаются и воспроизводятся. Эти способы позволяют решать задачи на вычисление пределов как школьного, так и вузовского уровней, демонстрируя пример эффективного решения проблемы преемственности математического образования в системе *школа – вуз*. Обучающиеся профильных классов могут получить опыт решения задач по математическому анализу с использованием этих формул уже на уровне среднего образования, который будет также востребован в ходе продолжения математического образования в вузе.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (б. у. г. п.) сама по себе является предельным значением суммы конечной геометрической прогрессии, но (как и формула бинома) хорошо известна выпускникам школ. Она имеет вид:

$$S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{где } |x| < 1. \qquad (5)$$

Она получается как предел при $n \to \infty$ от суммы конечной геометрической прогрессии:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^n \cdot x}{1-x}.$$

Так же как обобщенная формула бинома Ньютона (4), формулу суммирования (5) можно получить как частный случай формулы Тейлора-Маклорена для степенного бинома с показателем степени $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n), \text{при } x \to 0. \qquad (6)$$

Знание школьной формулы (5) позволяет учащимся быстро выполнить разложение по формуле Тейлора дробно-степенной функции в окрестности заданной точки, а также проводить оценки сверху при доказательстве степенных неравенств и при доказательстве сходимости числовых последовательностей по теореме Вейерштрасса, теореме о зажатой последовательности и критерию Коши (прим. 5).

Пример 5.
Доказать ограниченность сверху числовой последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Доказательство: преобразуем выражение общего члена последовательности по формуле бинома Ньютона (2):

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\dots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

В полученном выражении для каждого $k=1,2,\ldots,n-1$ воспользуемся очевидными оценками сверху:

1. $\left(1-\frac{k}{n}\right)<1$;
2. $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}<\frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

В итоге для каждого натурального n получим:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$
$$=2+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)<\left[\begin{array}{l}\text{Добавим в выражение}\\ \text{в скобках слагаемые}\\ \text{до вида б. у. г. п. (5)}\end{array}\right]<$$
$$<2+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\dots\right)=$$
$$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2+\frac{1}{2}\cdot2=3.$$

Таким образом, было доказано, что для каждого натурального n справедлива оценка $x_n<3$, что и означает ограниченность сверху для последовательности x_n.

Заметим, что хотя для решения приведенных здесь задач используются различные методы из теории пределов, но при этом в основе всех решений заявлены знакомые школьные формулы. Это сразу облегчает восприятие данных решений до уровня школьных и делает их доступными большинству обучающихся.

Заключение

Обобщенные варианты формулы бинома Ньютона и формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии представляют разложение соответствующих степенных функций по формуле Тейлора-Маклорена. Предлагается предварительное применение обобщенных формул в начальных разделах курса математического анализа еще до момента их строгого доказательства как формул Тейлора-Маклорена. Это подразумевает применение уже известных математических формул, но в новом статусе и с новыми условиями. В частности, предлагается использовать комбинаторную формулу бинома для вычисления пределов. Для этого рекомендуется выполнить постепенный переход в применении этой формулы с классического случая для натуральной степени бинома на случай произвольной степени бинома с теми же биномиальными коэффициентами, но с дополнительным условием на члены бинома. При этом вводится сокращенная форма записи бесконечных сумм на основе наглядно-интуитивного понятия о-малого, что в дальнейшем облегчает введение строгого определения этого абстрактного понятия из о-символики. Благодаря этому новый учебный материал и соответствующие ему практические задачи опираются на уже знакомые формулы, а значит быстрее и легче усваиваются студентами, что очень важно на начальном этапе обучения в вузе. Новое применение «старой» формулы бинома позволяет студентам быстро освоить технически простой, но при этом универсальный способ вычисления пределов рациональных и иррациональных функций с необходимыми ограничениями на переменную, а также дает наглядное вводное представление о формулах Тейлора-Маклорена, доказываемых в последующем разделе курса. Столь же полезной в практике математического анализа оказывается применение формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Эта формула суммирования является результатом предельного перехода в формуле для суммы конечной геометрической прогрессии и может быть представлена как частный случай биномиальной формулы Тейлора-Маклорена. Она (так же как и формула бинома Ньютона) хорошо известна выпускникам школ и позволяет легко упрощать сложные степенные выражения с признаками убывающей геометрической прогрессии.

Основными методическими особенностями использования рассмотренных формул из школьного курса алгебры в курсе математического анализа в вузе, выявленными в работе, являются:

- необходимость преобразований формул к эквивалентному виду, имеющему новую практическую значимость;
- использование формул в нетипичных задачах, т. е. в задачах, не вполне соответствующих их назначению в школьной математике;
- общий вид слагаемых в обобщенных формулах не меняется, что обеспечивает легкую преемственность этих формул;
- мотивация студентов к освоению новых понятий, связанных с обобщенной формулой;
- обобщенные формулы представляют разновидность формулы Тейлора-Маклорена для степенных функций;
- наглядная предварительная демонстрация актуальности разложения по формулам Тейлора-Маклорена.

В соответствии с приведенными особенностями преподавателям математического анализа в вузе для достижения эффективности и качества образовательного процесса можно рекомендовать следующий алгоритм использования указанных формул в начальных разделах курса: Предел числовой последовательности,

 https://doi.org/10.21603/2542-1840-2025-9-2-275-282

Предел и непрерывность функции и Дифференциальное исчисление:

1. Повторение необходимых формул в вводной части курса.
2. Преобразование формул к эквивалентному виду, актуальному в курсе математического анализа.
3. Введение обобщенных вариантов формул с указанием необходимых для них условий (без приведения строгого доказательства, со ссылкой на доказательство формул Тейлора-Маклорена в разделе «Дифференциальное исчисление»).
4. Выделение характерных отличий обобщенных формул от исходных.
5. Обсуждение возможности различных форм записи обобщенных формул с введением понятия о-малого от степени на наглядно-интуитивном уровне.
6. Применение обобщенных формул при доказательстве сходимости и при вычислении пределов.
7. Строгое определение понятия о-малого на основе используемого в обобщенных формулах вводного понятия о-малого от степени.
8. Использование биномиальных формул в качестве готовых наглядных примеров разложения элементарных функций по формуле Тейлора-Маклорена.

Конфликт интересов: Автор заявил об отсутствии потенциальных конфликтов интересов в отношении исследования, авторства и / или публикации данной статьи.
Conflict of interests: The author declared no potential conflict of interests in relation to the research, authorship and/or publication of this article.

Литература / References

1. Семина И. С., Уварова Н. Н. Преемственность школьного и вузовского образования в современных условиях. *Профессиональное образование и рынок труда*. 2015. № 9-10. С. 32–33. [Semina I. S., Uvarova N. N. Continuity of school and university education in modern conditions. *Vocational education and labor market*, 2015, (9-10): 32–33. (In Russ.)] https://elibrary.ru/vvvsyt
2. Ковалева Г. И., Милованов Н. Ю. Способы обеспечения преемственности изучения понятий математического анализа между школой и вузом. *Мир науки, культуры, образования*. 2017. № 1. С. 56–57. [Kovaleva G. I., Milovanov N. Yu. Ways of ensuring continuity of study of concepts of mathematical analysis between school and university. *The world of science, culture and education*, 2017, (1): 56–57. (In Russ.)] https://elibrary.ru/xxjoaz
3. Подуфалов Н. Д. Научное наследие К. Д. Ушинского и проблемы современной дидактики. *Педагогика*. 2023. Т. 87. № 4. С. 5–17. [Podufalov N. D. Scientific heritage of K. D. Ushinsky and problems of modern didactics. *Pedagogy*, 2023, 87(4): 5–17. (In Russ.)] https://elibrary.ru/jnovmn
4. Капкаева Л. С., Тагаева Е. А. Условия реализации преемственности обучения началам математического анализа в школе и вузе. *Современные проблемы математики и математического образования*: Междунар. науч. конф. (Санкт-Петербург, 18–20 апреля 2023 г.) СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2023. С. 67–72. [Kapkaeva L. S., Tagaeva E. A. Conditions for the implementation of the continuity of teaching the principles of mathematical analysis at school and university. *Modern problems of mathematics and mathematical education*: Proc. Intern. Sci. Conf., St. Petersburg, 18–20 Apr 2023. St. Petersburg: Herzen Universiry, 2023, 67–72. (In Russ.)] https://elibrary.ru/uplkbb
5. Капарова Р. М., Мелатхан У., Есенгалиев С. Т. О проблемах преемственности обучения курсу математического анализа в школе и в педагогическом вузе. *Global challenges – scientific solutions II*: конф. (Антверпен, 14 октября 2020 г.) Лейпциг: Center of Innovative Development "DARA", 2020. С. 373–379. [Kaparova R. M., Melathan U., Esengaliev S. T. Continuity of mathematical analysis at school and in pedagogical university. *Global challenges – scientific solutions II*: Proc. Conf., Antwerp, 14 Oct 2020. Leipzig: Center of Innovative Development "DARA", 2020, 373–379. (In Russ.)] https://elibrary.ru/nzomjv
6. Шастун Т. А., Глазьев В. В. Проблема преемственности в обучении математики: подходы к новой образовательной парадигме. *Педагогический журнал*. 2020. Т. 10. № 2-1. С. 70–77. [Shastun T. A., Glazev V. V. The problem of continuity in teaching mathematics: Approaches to a new educational paradigm. *Pedagogical Journa*l, 2020, 10(2-1): 70–77. (In Russ.)] https://doi.org/10.34670/AR.2020.45.49.008
7. Милованов Н. Ю. Графическая интерпретация математических фактов как условие преемственности обучения математическому анализу в школе и вузе. *Грани познания*. 2013. № 1. С. 72–79. [Milovanov N. Yu. Graphic interpretation of mathematic facts as the condition of succession of mathematical analysis teaching at school and higher school. *The Edge of Cognition*, 2013, (1): 72–79. (In Russ.)] https://elibrary.ru/qavjyj
8. Салахов А. З. Условия обеспечения преемственности школьного и вузовского курса математического анализа. *Известия ДГПУ. Психолого-педагогические науки*. 2011. № 2. С. 119–123. [Salakhov A. Z. Conditions for ensuring the continuity of school and university course of mathematical analysis. *Izvestia DSPU. Psychological and Pedagogical Sciences*, 2011, (2): 119–123. (In Russ.)] https://elibrary.ru/ocrgwn

9. Ференчук Л. В. Проблемы преемственности в обучении математике между школой и вузом. *Территория науки*. 2013. № 5. С. 20–25. [Ferenchuk L. V. Problems of continuity in teaching mathematics between school and university. *Teorija nauki*, 2013, (5): 20–25. (In Russ.)] https://elibrary.ru/wwxxtf
10. Чаплыгин В. Ф. Основные понятия анализа в школьном курсе математики. Некоторые методические подходы. *Ярославский педагогический вестник*. 2003. № 1. С. 125–131. [Chaplygin V. F. Basic concepts of analysis in the school course of mathematics. Some methodical approaches. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 2003, (1): 125–131. (In Russ.)] https://elibrary.ru/pyayyr
11. Покровский В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия. Владимир: ВлГУ, 2014. 143 с. [Pokrovskiy V. P. *Methodology of teaching mathematics: Functional content-methodical line*. Vladimir: VlSU, 2014, 143. (In Russ.)]
12. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. и др. Алгебра и начала математического анализа 10–11 классы. М.: Просвещение, 2016. 463 с. [Alimov Sh. A., Kolyagin Yu. M., Tkacheva M. V. et al. *Algebra and basic mathematical analysis in grades 10–11*. Moscow: Prosveshchenie, 2016, 463. (In Russ.)]
13. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетникови Н. Н. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2014. 464 с. [Nikolsky S. M., Potapov M. K., Reshetnikov N. N. et al. *Algebra and basic mathematical analysis. Grade 11*. Moscow: Prosveshchenie, 2014, 464. (In Russ.)]
14. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. М.: Просвещение, 2016. 384 с. [Kolmogorov A. N., Abramov A. M., Dudnitsyn Y. P. et al. *Algebra and basic mathematical analysis. Grades 10–11*. Moscow: Prosveshchenie, 2016, 384. (In Russ.)]
15. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. М.: Мнемозина, 2009. Ч. 1. 424 с. [Mordkovich A. G. *Algebra and basic mathematical analysis. Grades 10–11*. Moscow: Mnemozina, 2009, pt. 1, 424. (In Russ.)]
16. Кисельников И. В. Обучение фундаментальным понятиям математического анализа в школьном курсе математики на основе их образного представления. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2022. № 1-3. С. 61–67. [Kiselnikov I. V. Teaching fundamental concepts of mathematical analysis in a school mathematics course based on their imaginative representation. *International Research Journal*, 2022, (1-3): 61–67. (In Russ.)] https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.115.1.082
17. Тагаева Е. А. Теоретические основы обучения учащихся старших классов решению задач по алгебре и началам математического анализа в условиях преемственности между школой и вузом. *Гуманитарные науки и образование*. 2016. № 3. С. 58–61. [Tagaeva E. A. Theoretical foundations of teaching senior classes students solving problems in algebra and mathematical analysis in terms of continuity between school and university. *Humanities and Education*, 2016, (3): 58–61. (In Russ.)] https://elibrary.ru/wmbumr
18. Алексеенко А. С., Лихачева М. В. Об изучении предела в школьном курсе математики. *Проблемы педагогики*. 2017. № 4. С. 25–30. [Alekseenko A. S., Likhacheva M. V. Studying the limit in the school course of mathematics. *Problemy pedagogiki*, 2017, (4): 25–30. (In Russ.)] https://elibrary.ru/ykwaip
19. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 19-е изд., испр. СПб.: Лань, 2017. 623 с. [Demidovich B. P. *Collection of tasks and exercises in mathematical analysis*. 19th ed. St. Petersburg: Lan, 2017, 623. (In Russ.)]
20. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. 6-е изд. М.: Юрайт, 2023. Т. 1. 703 с. [Kudryavtsev L. D. *Course of mathematical analysis in 3 volumes*. 6th ed. Moscow: Jurajt, 2023, vol. 1, 703. (In Russ.)]
21. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 1. 440 с. [Fikhtenholtz G. M. *Fundamentals of mathematical analysis*. Moscow: Nauka, 1968, vol. 1, 440. (In Russ.)]
22. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 2. 464 с. [Fikhtenholtz G. M. *Fundamentals of mathematical analysis*. Moscow: Nauka, 1968, vol. 2, 464. (In Russ.)]
23. Коннова Л. П., Степанян И. К. Математический анализ просто! М.: Прометей, 2023. 1256 с. [Konnova L. P., Stepanyan I. K. *Mathematical analysis is easy!* Moscow: Prometei, 2023, 1256. (In Russ.)] https://elibrary.ru/prdnyp
24. Вайнштейн И. И., Манушкина М. М. К методике преподавания темы «Предел функции». *Сибирский педагогический журнал*. 2011. № 5. С. 64–69. [Weinstein I. I., Manushkina M. M. On one method of delivering "Limit of a function" topic. *Siberian Pedagogical Journal*, 2011, (5): 64–69. (In Russ.)] https://elibrary.ru/peuqaj
25. Чубариков В. Н. Обобщенная формула бинома Ньютона и формулы суммирования. *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21. № 4. С. 270–301. [Chubarikov V. N. A generalized Newton binomial formula and a sum formula. *Chebyshevskii Sbornik*, 2020, 21(4): 270–301. (In Russ.)] https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-270-301