УДК 532.5:001.891.573

Л.Р. Хачатрян, Р.В. Котляров, А.А. Крохалев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЖИДКОСТЬЮ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Мембранные методы получили широкое распространение при переработке жидких пищевых сред. Разработка и внедрение нового мембранного оборудования предполагает обоснованный выбор его параметров, в том числе размеров отдельных элементов конструкции. Математическое моделирование позволяет осуществить выбор параметров мембранного оборудования на стадии его проектирования на основе создания и исследования соответствующих математических моделей. Особый интерес представляют математические модели гидродинамических условий во внутреннем канале трубчатого керамического мембранного фильтра при установке в нем элементов различной геометрической формы с целью снижения влияния «концентрационной поляризации» на показатели эффективности процесса переработки жидких пищевых сред. Использование гидродинамических элементов позволяет локально повысить скорость потока перерабатываемой среды, что способствует уменьшению слоя задерживаемых веществ на поверхности мембраны и интенсифицирует мембранный процесс. В качестве гидродинамического элемента выбран усеченный конус. В работе приведены основные аналитические зависимости, позволяющие определить гидродинамические условия, такие как скорость потока среды (критерий Рейнольдса) и потери давления, в зависимости от вязкости среды и геометрических размеров гидравлического сопротивления в виде конического элемента, расположенного в цилиндрическом канале. Рассмотрена методика расчета гидродинамических условий при обтекании жидкостью конического элемента в цилиндрическом канале. Программными средствами MathCAD реализована математическая модель изменения гидродинамических условий на гидравлическом сопротивлении в виде конического элемента. Проведен расчет гидродинамических условий на примере движения водного раствора во внутреннем канале трубчатого керамического мембранного фильтра. Выбраны рациональные значения геометрических размеров конического элемента.

Математическая модель, гидродинамические условия, конический элемент, мембранные методы.

Введение

Математическое моделирование является неотъемлемой частью современного научного исследования. Математическая модель представляет собой эффективный инструмент познания реального объекта и позволяет определить его характеристики, получить оценку показателей эффективности качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта [1, 7].

Математическое моделирование применимо к различным процессам, протекающим при переработке пищевых сред – механическим (в том числе мембранным), теплообменным, массообменным и т.д.

В основе математической модели процессов мембранной переработки, как правило, лежат показатели их эффективности – селективность и удельная производительность (проницаемость). Во многом снижение данных показателей обусловлено явлением «концентрационной поляризации», которое связано с накоплением слоя задерживаемых веществ на поверхности мембраны. Одним из эффективных способов борьбы с данным явлением служит гидродинамический способ, заключающийся в использовании специальных элементов, локально повышающих скорость потока среды.

При проектировании нового мембранного оборудования необходим расчет и обоснованный выбор параметров аппарата.

Целью данной работы являлась разработка математической модели гидродинамических условий при обтекании жидкостью конического элемента в цилиндрическом канале и методики выбора рациональных размеров конического элемента на основе реализации модели программными средствами современных математических пакетов.

Объект и методы исследования

Объектом моделирования является совокупность гидродинамических условий, таких как скорость потока среды (критерий Рейнольдса) и потери давления, в зависимости от вязкости среды и геометрических размеров гидравлического сопротивления в виде конического элемента, расположенного в цилиндрическом канале (рис. 1).

В основу расчета положено уравнение неразрывности потока [2, 3]

$$Q' = Q'' = const \qquad (1)$$

или

$$S' \cdot v' = S'' \cdot v'' = const \qquad (2)$$

где Q', Q'' – объемные расходы в областях меньшего и большего оснований усеченного конуса соответственно, м^3/ч; S', S'' – площади кольцевых сечений в областях меньшего и большего оснований усеченного конуса соответственно, м^2; v′, v″ – скорости течения потока среды в областях меньшего и большего оснований усеченного конуса соответственно, м/с.

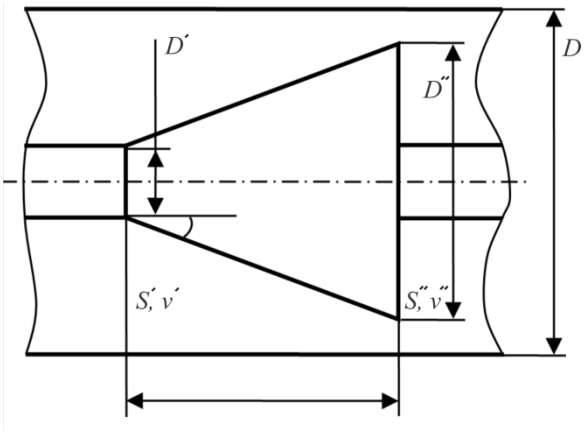

Рис. 1. Конический элемент в цилиндрическом канале

Гидродинамические условия в потоке характеризует критерий Рейнольдса (Re), учитывающий отношение сил инерции к силам трения [2, 3, 6]

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot \mathrm{v} \cdot D_{экв}}{\eta} = \frac{\mathrm{v} \cdot D_{экв}}{\nu}, \qquad (3)$$

где ρ – плотность среды, кг/м^3; v – скорость потока, м/с; $D_{экв}$ – эквивалентный диаметр, м; η – динамический коэффициент вязкости, Н·с/м^2; ν – кинематический коэффициент вязкости, м^2/с.

Эквивалентный диаметр кольцевого пространства определяется по формуле:

$$D_{экв} = D - d, \qquad (4)$$

где D – наружный диаметр кольца, м; d – внутренний диаметр кольца, м.

Потери давления на местном сопротивлении определяются по формуле Вейсбаха [2, 3, 6]

$$\Delta p = \xi \frac{\mathrm{v}^2}{2} \cdot \rho, \qquad (5)$$

где Δp – потери давления на местном сопротивлении, Па; ξ – коэффициент местного сопротивления; v – скорость потока, м/с; ρ – плотность среды, кг/м^3.

Конический элемент в цилиндрическом канале представляет собой кольцевой конфузор. Коэффициент гидравлического сопротивления кольцевого конфузора может быть определен по эквивалентному коническому конфузору с той же степенью сужения, длиной и площадью выходного сечения [4, 5]. Угол сужения эквивалентного конического конфузора определим по формуле в соответствии с рис. 1

$$\alpha = 2arctg\left(\frac{\left(\sqrt{1 - D''/D}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{n_0}\right)}{2L/D}\right), \qquad (6)$$

где n_0 – степень сужения:

$$n_0 = S' / S''. \qquad (7)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления определим по формуле [5]

$$\zeta = \zeta_м + \zeta_{тр}, \qquad (8)$$

где $\xi_м$ – коэффициент местных потерь [5]; $\xi_{тр}$ – коэффициент потерь на трение по длине конфузора [5].

$$\xi_м = (-0{,}0125 \cdot n_0^4 + 0{,}0224 \cdot n_0^3 - 0{,}00723 \cdot n_0^2 + $$
$$+ 0{,}00444 \cdot n_0 - 0{,}00745) \cdot \alpha_p^3 - 2\pi\alpha_p^2 - 10\alpha_p, \qquad (9)$$

где α_p – угол сужения в радианах [5];

$$\alpha_p = 0{,}01745\alpha \qquad (10)$$

$$\xi_{тр} = \frac{\lambda \cdot \left(1 - n_0\right)}{8\sin\left(\alpha/2\right)}, \qquad (11)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения.

Заметим, что уравнение (2) позволяет рассчитать скорость течения потока среды в области большего основания усеченного конуса при известной скорости в области меньшего основания. Для расчета изменения скорости потока среды по всей длине конического элемента разобьем его на бесконечно большое количество n элементарных сечений (рис. 2) длиной $l = l_1 = l_2 = \ldots = l_n$, т.е.

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i = n \cdot l \qquad (12)$$

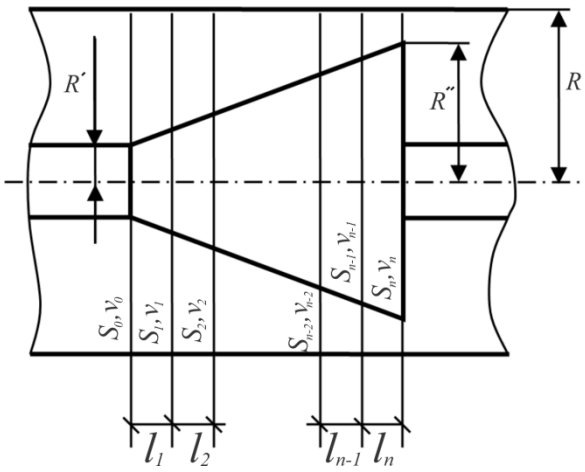

Рис. 2. Конический элемент в цилиндрическом канале (расчетная модель): v_0, v_1, v_2 … v_n – скорости на границах элементарных сечений, м/с; S_0, S_1, S_2 … S_n – граничные площади элементарных сечений, м^2

С учетом вышесказанного приведем расчетные формулы.

В соответствии с (2) скорость потока определяется по формуле:

$$v_{i+1} = v_i \cdot \frac{S_i}{S_{i+1}}, i = \overline{0,n} \qquad (13)$$

$$S_i = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot \left(R' + i \cdot \Delta R\right)^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(R^2 - \left(R'\right)^2 - 2i \cdot \Delta R \cdot R' - \left(i \cdot \Delta R\right)^2\right), i = \overline{0,n} \qquad (14)$$

где ΔR – приращение радиуса меньшего основания усеченного конуса

$$\Delta R = l \cdot tg\alpha, \qquad (15)$$

$$tg\alpha = \frac{R'' - R'}{L}$$

В соответствии с (3) критерий Рейнольдса определяется по формуле

$$\mathrm{Re}_i = \frac{2\rho \cdot \mathrm{v}_i \cdot \left(R - \left(R' + i \cdot \Delta R\right)\right)}{\eta} \qquad (16)$$

В соответствии с (4) потери давления определяются по формуле

$$\Delta p = \xi \frac{\mathrm{v}_i^2}{2} \cdot \rho \qquad (17)$$

Зависимости (13)–(17) могут быть реализованы программными средствами математических пакетов.

Результаты и их обсуждение

Математическая модель гидродинамических условий на гидравлическом сопротивлении в виде конического элемента, расположенного в цилиндрическом канале, реализована средствами MathCAD.

Методика расчета гидродинамических условий предполагает следующие этапы:

1. Построение семейства кривых изменения скоростей по длине конического элемента в зависимости от сочетания значений диаметров большего и меньшего его оснований и выбор кривых, демонстрирующих более интенсивную динамику скорости. На данном этапе длину конического элемента принимают постоянной.

Проведем расчет на примере конического элемента, расположенного в канале трубчатого керамического мембранного фильтра. Современная отечественная промышленность (в частности, ООО НПО «Керамикфильтр») выпускает трубчатые керамические мембранные фильтры с диаметром внутреннего канала 6 мм и длиной 800 мм. Произвольно положим длину конического элемента 10% от общей длины, т.е. L = 8 мм = 0,008 м. Примем комбинации значений большего D'' и меньшего D' диаметров конического элемента в соответствии с табл. 1. В качестве среды рассмотрим крахмальное молоко как слабоконцентрированный водный раствор, поэтому примем ρ = 1000 кг/м^3 и η = 0,001 Н·с/м^2 при средней температуре 20ºС. Расчет производится при условии, что скорость потока пермеата сквозь мембранный фильтр значительно меньше скорости потока среды в его внутреннем канале, поэтому скоростью потока пермеата пренебрегают, и уравнение (2) справедливо. Также при расчетах примем n = 1000.

Таблица 1

Комбинации значений большего D'' и меньшего D' диаметров конического элемента

Номер комбинации	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D', м	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004
D'', м	0,002	0,003	0,004	0,005	0,003	0,004	0,005	0,004	0,005	0,005

Наиболее интенсивную динамику скорости демонстрируют кривые, соответствующие комбинациям 4, 7 и 9 табл. 1 (рис. 3).

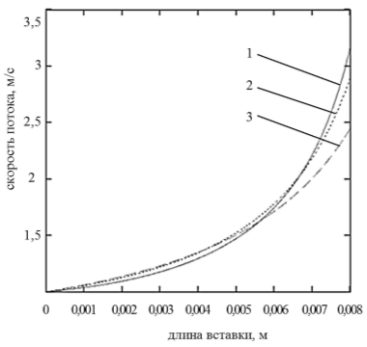

Рис. 3. Кривые динамики скорости при начальной скорости 1 м/с: 1 – D' = 0,001 м, D'' = 0,005 м; 2 – D' = 0,002 м, D'' = 0,005 м; 3 – D' = 0,003 м, D'' = 0,005 м

2. Построение семейства кривых потерь давлений по длине конического элемента для выбранных кривых изменения скорости, т.е. кривых, соответствующих комбинациям 4, 7 и 9 табл. 1 (рис. 4). Очевидно, что минимальными потерями давления характеризуется комбинация 4, поскольку площадь, ограниченная соответствующей кривой, меньше площадей, ограниченных кривыми, соответствующими комбинациям 7 и 9.

Таким образом, в качестве рациональных значений принимаем значения большего D'' = 0,005 м и меньшего D' = 0,001 м диаметров оснований конического элемента.

3. Выбор рационального значения длины конического элемента, который осуществляется на основании критерия Q (17), учитывающего суммарные потери давления Δp на некотором количестве конических элементов N:

$$Q = N + \frac{1}{\Delta p} \to \max . \qquad (18)$$

Расчет значений критерия и выбор его максимального значения осуществлялся средствами MathCAD. В результате получено рациональное значение длины конического элемента L = 4,2 мм.

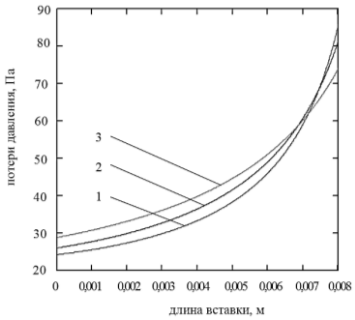

Рис. 4. Кривые потерь давления при начальной скорости 1 м/с: 1 – D' = 0,001 м, D'' = 0,005 м; 2 – D' = 0,002 м, D'' = 0,005 м; 3 – D' = 0,003 м, D'' = 0,005 м

Следовательно, при переработке слабоконцентрированного водного раствора с применением трубчатого керамического мембранного фильтра с диаметром внутреннего канала 0,006 м и длиной 0,8 м рациональные размеры конического элемента составят: диаметр большего основания 0,005 м, диаметр меньшего основания 0,001 м, длина 0,0042 м.

Таким образом, реализована математическая модель гидродинамических условий, таких как скорость потока среды (критерий Рейнольдса) и потери давления на гидравлическом сопротивлении в виде конического элемента, расположенного в цилиндрическом канале, позволяющая провести расчет и обоснованный выбор рациональных размеров мембранного оборудования. Математическая модель предусматривает возможность расчета мембранного оборудования с различным диаметром керамических мембран, выпускаемых отечественной и зарубежной промышленностью. Кроме того, математическая модель учитывает свойства перерабатываемых сред, и, следовательно, применима при расчете гидродинамических условий, возникающих в большинстве пищевых сред при их переработке мембранными методами. Применение математической модели на этапе проектирования мембранного оборудования значительно упрощает расчет его отдельных элементов и сокращает сроки ввода оборудования в эксплуатацию.

Список литературы

1. Малыгин, Е.Н. Математические методы в технических расчетах / Е.Н. Малыгин. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

2. Гейер, В.Г. Гидравлика и гидропривод / В.Г. Гейер, В.С. Дулин, А.Н. Заря. – М.: Недра, 1991. – 333 с.

3. Ухин, Б.В. Гидравлика / Б.В. Ухин, А.А. Гусев. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 432 с.

4. Асламова, В.С. Расчет гидродинамического сопротивления прямоточного циклона с промежуточным отбором / В.С. Асламова // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313, № 4. – С. 54–60.

5. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. Под ред. М.О. Штейнберга. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.

6. Kerger, F. Modeling flows in environmental and civil engineering / F. Kerger, B.J. Dewals, S. Erpicum, P. Archambeau, M. Pirotton. – Nova Science Publishers, Inc., 2010. – 151 p.

7. Chakraborty, D. Modeling and simulation of rotating disk-membrane module in ultrafiltration of bovine serum albumin / D. Chakraborty, D. Sarkar, C. Bhattacharjee // Separation science and technology. – 2013. – Vol. 48, № 17. – P. 2549–2566.

ФГБОУ ВПО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности»,
650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47.
Тел/факс: +7 (3842) 73-40-40
e-mail: office@kemtipp.ru

SUMMARY

L.R. Hachatryan, R.V. Kotlyarov, A.A. Krokhalev

MATHEMATICAL MODEL OF HYDRODYNAMIC CONDITIONS OF THE LIQUID FLOW AROUND THE CONIC SURFACE IN THE CYLINDRICAL CHANNEL

Membrane methods are widespread in the processing of liquid food media. Development and implementation of new membrane equipment involves the reasonable choice of its parameters, including the sizes of several structural elements. Mathematical modeling makes it possible to select the parameters of the developed membrane equipment at the design stage on the basis of the creation and study of appropriate mathematical models. Particular interest is in the mathematical models of hydrodynamic conditions in the internal channel of the tubular ceramic membrane filter when it contains elements of various geometric shapes, aiming to reduce the influence of "concentrated polarization" on the productivity of the processing of liquid food media. The use of hydrodynamic elements enables to in-

crease locally the flow rate of the product, which leads to a decrease of detained substance layer on the membrane surface and intensifies the membrane process. The hydrodynamic element in the form of conic surface has been selected. The basic analytical dependences have been examined. They helped to determine the hydrodynamic conditions, such as flow rate (Reynolds criterion) and loss of pressure, depending on the viscosity and geometric dimensions of the hydraulic resistance in the form of a conic surface in the cylindrical channel. The method of calculation of hydrodynamic conditions of the liquid flow around the conic surface in the cylindrical channel has been considered. The mathematical model of hydrodynamic conditions with hydraulic resistance in the form of a conic surface in the cylindrical channel has been created with MathCAD. The calculation of hydrodynamic conditions by the example of the movement of low concentrated water solution in the internal channel of the tubular ceramic membrane filter has been done. The rational sizes of geometric dimensions of a conic surface have been chosen.

Mathematical model, hydrodynamic conditions, conic surface, membrane methods.

References

1. Malygin E.N. *Matematicheskie metody v tekhnicheskikh raschetakh* [Mathematical methods in technical calculations]. Tambov, Publishing House of the Tambov State Technical University, 2010. 80 p.

2. Gejer V.G., Dulin V.S., Zarja A.N. *Gidravlika i gidroprivod* [Hydraulics and hydraulic actuator]. Moscow, Nedra Publ., 1991. 333 p.

3. Uhin B.V., Gusev A.A. *Gidravlika* [Hydraulics]. Moscow, INFRA-M, 2010. 432 p.

4. Aslamova V.S. Raschet gidrodinamicheskogo soprotivleniia priamotochnogo tsiklona s promezhutochnym otborom [Calculation of hydrodynamic resistance of a direct-flow cyclone with intermediate selection]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2008, vol. 313, no. 4, pp. 54-60.

5. Idel'chik I.E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniiam* [Reference book on hydraulic resistance]. Moscow, Mashinostroenie, 1992. 672 p.

6. KergerF., Dewals B.J., Erpicum S., Archambeau P., Pirotton M. Modeling flows in environmental and civil engineering. *Nova Science Publishers, Inc.*, 2010. 151 p.

7. Chakraborty D., Sarkar D., Bhattacharjee C. Modeling and simulation of rotating disk-membrane module in ultrafiltration of bovine serum albumin. *Separation science and technology*, 2013, vol. 48, no. 17, pp. 2549-2566.

Kemerovo Institute of Food Science and Technology,
47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia.
Phone/Fax: +7 (3842) 73-40-40,
e-mail:office@kemtipp.ru

Дата поступления: 24.01.2015